Mathematik 2 für ET

Diese Lernkarten sind sorgfältig erstellt worden, erheben aber weder Anspruch auf Richtigkeit noch auf Vollständigkeit.

Das Lernen mit Lernkarten funktioniert nur wenn die Inhalte bereits einmal verstanden worden sind. Ich warne davor diese Lernkarten nur stur auswendig zu lernen.

Diese und andere Lernkarten können von
`http://www.clifford.at/zettelkasten/`
heruntergeladen werden.

Viel Erfolg bei der **Mathematik 2 für ET** Prüfung!

Clifford Wolf <clifford@clifford.at>

Vektoren in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$

Unter einem **Vektor** in $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ versteht man ein algebraisches Objekt das durch ein Tupel von n reellen bzw. komplexen Zahlen dargestellt werden kann.

Geometrisch eignen sich Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ zur Darstellung von Koordinaten in der Ebenen und Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ zur Darstellung von Koordinaten im Raum.

Dazu wird der Punkt X mit den Koordinaten (x_1, x_2) mit seinem **Ortsvektor** $\vec{x}$ vom Ursprungspunkt O zum Punkt X identifiziert:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Addition von Vektoren
Multiplikation von Vektor und Skalar

Für Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ gilt:

Die Addition von Vektoren entspricht der „Aneinanderreihung“ der Vektoren, so dass sie ein **Kräfteparallelogramm** aufspannen:

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation von Vektor und Skalar entspricht der Streckung oder Stauchung des Vektors um den durch den Skalar gegebenen Faktor:

$$s\vec{x} = s \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sx_1 \\ sx_2 \end{pmatrix}$$

Analog dazu wird die Addition von Vektoren und Multiplikation von Vektor und Skalar für Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ definiert.

Der Nullvektor

Der Nullvektor $\vec{0}$ ist der Vektor mit der Eigenschaft $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$.

Für Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ ist der Nullvektor definiert als der Vektor bei dem alle Komponenten den Wert 0 haben:

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vektorraum
(reell bzw. komplex)

Eine Menge $\mathbb{V}$ auf der eine Addition $\vec{x} + \vec{y}$ mit $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{V}$ und eine Multiplikation $s\vec{v}_1$ mit $s \in \mathbb{R}$ definiert ist (und die bezüglich dieser Operationen abgeschlossen ist) für die die folgenden 8 Gesetze gelten heißt **reeller Vektorraum**.

1. $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ .... Kommutativgesetz der Addition
2. $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ .... Assoziativgesetz der Addition
3. $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ .... $\vec{0}$ ist neutrales Element der Addition
4. $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$ .... $-\vec{x}$ ist inverses Element zu $\vec{x}$
5. $(st)\vec{x} = s(t\vec{x})$ .. Assiziativgesetz der Multiplikation mit Skalaren
6. $(s + t)\vec{x} = s\vec{x} + t\vec{x}$ .... 1. Distributivgesetz
7. $s(\vec{x} + \vec{y}) = s\vec{x} + s\vec{y}$ .... 2. Distributivgesetz
8. $1\vec{x} = \vec{x}$ .... 1 ist neutrales Element der Multiplikation

Im Fall $s \in \mathbb{C}$ heißt die Menge **komplexer Vektorraum**.

Unterraum

Eine Teilmenge $\mathbb{U} \subset \mathbb{V}$ des Vektorraumes $\mathbb{V}$ heißt **Unterraum** von $\mathbb{V}$ wenn $\mathbb{U}$ ebenfalls ein Vektorraum ist.

Insbesondere ist $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ wenn $\mathbb{U}$ abgeschlossen ist. D.h.

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{U}: \quad \forall s \in \mathbb{R}: \quad \vec{x} + \vec{y} \in \mathbb{U} \quad \wedge \quad s\vec{x} \in \mathbb{U}$$

Geometrisch ist ein Unterraum $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ eine Gerade, Ebene oder Hyperebene durch den Ursprung. (Bzw. als kleinster denkbarer Unterraum $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ nur der Ursprungspunkt: $U = \{\vec{0}\}$)

Linearkombination
und lineare Abhänigkeit

Sei $\mathbb{V}$ ein Vektorraum mit dem Skalarkörper $\mathbb{K}$.
Sei weiters $\vec{v}_i \in \mathbb{V}$ und $s_i \in \mathbb{K}$ mit $i = 1, \ldots, k$ und $k \in \mathbb{N}$.

Einen Vektor

$$\vec{v} = s_1\vec{v}_1 + s_2\vec{v}_2 + \cdots + s_k\vec{v}_k$$

nennt man **Linearkombination** von $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$.

Die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ heißen **linear abhänig**, wenn es Skalare $(s_1, \ldots, s_k) \neq (0, \ldots, 0)$ gibt, sodass

$$s_1\vec{v}_1 + s_2\vec{v}_2 + \cdots + s_k\vec{v}_k = \vec{0}.$$

Andernfalls heißen die Vektoren **linear unabhänig**.

Eigenschaften linear abhäniger
und lin. unabhäniger Vektoren,
Definition: lineare Hülle

Sei $\mathbb{V}$ ein Vektorraum mit dem Skalarkörper $\mathbb{K}$.

1. Sind die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{V}$ l.a., so kann mindestens einer der Vektoren als Linearkombination der anderen dargestellt werden.

2. Sind die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{V}$ l.u., so sind für jeden Vektor $\vec{v} = s_1\vec{v}_1 + \cdots + s_k\vec{v}_k$ die Koeffizienten $s_1, \ldots, s_k$ eindeutig bestimmt.

3. Die Menge aller Linearkomb. der Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{V}$

$$\mathcal{L}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k) := \{s_1\vec{v}_1 + \cdots + s_k\vec{v}_k \;\mid\; s_i \in \mathbb{K}\}$$

nennt man den durch die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ **aufgespannen Unterraum** oder die **lineare Hülle** der Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$.

Basis und Dimension eines Vektorraumes

Sei $\mathbb{V}$ ein Vektorraum mit dem Skalarkörper $\mathbb{K}$.

Eine Menge $\mathbb{B} = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k\}$ von l.u. Vektoren $\vec{b}_i \in \mathbb{V}$ heißt **Basis** von $\mathbb{V}$, falls jeder Vektor aus $\mathbb{V}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k$ dargestellt werden kann.

D.h. wenn und nur wenn $\mathbb{B}$ eine Basis von $\mathbb{V}$ ist, dann ist

$$\mathcal{L}(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k) = \mathbb{V}.$$

Die Anzahl der Basisvektoren ist die **Dimension** von $\mathbb{V}$:

$$\dim(\mathbb{V}) = |\mathbb{B}|$$

Koordinaten

Sei $\mathbb{V}$ ein Vektorraum mit dem Skalarkörper $\mathbb{K}$, $\mathbb{B} = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ eine Basis von $\mathbb{V}$ und $\vec{v} \in \mathbb{V}$ ein Vektor aus mit der Darstellung

$$\vec{v} = s_1\vec{b}_1 + \cdots + s_n\vec{b}_n \quad \text{mit } s_i \in \mathbb{K}.$$

Dann nennt man den Vektor

$$[\vec{v}]_{\mathbb{B}} = (s_1 \cdots s_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{K}^n$$

Koordinatenvektor von $\vec{v}$ bezüglich der Basis $\mathbb{B}$ und die Werte $s_1, \ldots, s_n$ **Koordinaten** von $\vec{v}$ bezüglich der Basis $\mathbb{B}$.

Das Bestimmen der Koordinaten eines Vektors bezüglich einer Basis des beinhaltenden Vektorraums läuft auf das Lösen eines linearen Gleichungssystems heraus.

Matrix

Eine $m \times n$-Matrix A ist ein rechteckiges Schema mit m Zeilen und n Spalten von Skalaren a_{ij} mit $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Man kann sich eine Matrix auch als einen n-dimensionalen Zeilenvektor von m-dimensionalen Spaltenvektoren bzw. als einen m-dimensionalen Spaltenvektor von n-dimensionalen Zeilenvektoren denken.

Wenn nicht anders angegeben wird mit der Notation $\vec{v}$ idR. ein spaltenvektor, also eine $m \times 1$-Matrix bezeichnet.

Transponierte Matrix
Symmetrische Matrix
Quadratische Matrix
Diagonalmatrix
Einheitsmatrix
Nullmatrix

Die zu A **transponierte Matrix** A^{T} ist die um die Hauptdiagonale gespiegelte Matrix A: $A = (a_{ij}) \Rightarrow A^{\mathrm{T}} = (a_{ji})$

Eine Matrix A heißt **symmetrisch** wenn $A^{\mathrm{T}} = A$.

Eine $m \times n$-Matrix heißt **quadratisch** wenn $m = n$.

Eine Matrix $A = (a_{ij})$ heißt **Diagonalmatrix**, wenn alle Elemente außerhalb der Hauptiagonale Null sind. D.h. wenn $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$ gilt.

Die **Einheitsmatrix** I_n ist die $n \times n$-Matrix mit Einsen an allen Hauptiagonalelementen und Nullen an den anderen Elementen.

Die **Nullmatrix** $0_{m\times n}$ ist die $m \times n$-Matrix mit Nullen an allen Elementen.

Addition von Matrizen
Multiplikation von Matrix und Skalar

Seien $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ zwei $m \times n$-Matrizen und s ein Skalar:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$sA = (sa_{ij}) = \begin{pmatrix} sa_{11} & \cdots & sa_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ sa_{m1} & \cdots & sa_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Menge der $m \times n$-Matrizen sind ein Vektorraum (mit $0_{m \times n}$ als neutrales Element). Dementsprechend gelten die Rechenregeln für Vektorräume auch für Matrizen.

Multiplikation von Matrizen
– das Zeilen-Spalten-Bild –

Sei $A = (a_{ij})$ eine $m \times l$-Matrix und $B = (b_{ij})$ eine $l \times n$-Matrix. Dann ist das Produkt $C = AB = (c_{ij})$ eine $m \times n$-Matrix mit der Eigenschaft:

Jedes Element c_{ij} von C ist das innere Produkt des i-ten Zeilenvektors von A und dem j-ten Spaltenvektor von B:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{ml} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l1} & \cdots & b_{ln} \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj}$$

Multiplikation von Matrizen
– das Spalten-Spalten-Bild –

Sei $A = (a_{ij})$ eine $m \times l$-Matrix und $B = (b_{ij})$ eine $l \times n$-Matrix. Dann ist das Produkt $C = AB = (c_{ij})$ eine $m \times n$-Matrix mit der Eigenschaft:

Jede Spalte $\vec{c}_{\star j}$ von C ist eine Linearkombination aller Spalten von A mit den Werten der Spalte $\vec{b}_{\star j}$ von B als Koeffizienten:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{ml} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l1} & \cdots & b_{ln} \end{pmatrix}$$

$$\vec{c}_{\star j} = \sum_{k=1}^{l} \vec{a}_{\star k} b_{kj}$$

Multiplikation von Matrizen
– das Zeilen-Zeilen-Bild –

Sei $A = (a_{ij})$ eine $m \times l$-Matrix und $B = (b_{ij})$ eine $l \times n$-Matrix. Dann ist das Produkt $C = AB = (c_{ij})$ eine $m \times n$-Matrix mit der Eigenschaft:

Jede Zeile $\vec{c}_{i\star}$ von C ist eine Linearkombination aller Zeilen von B mit den Werten der Zeile $\vec{a}_{i\star}$ von A als Koeffizienten:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{ml} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l1} & \cdots & b_{ln} \end{pmatrix}$$

$$\vec{c}_{i\star} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} \vec{b}_{k\star}$$

Multiplikation von Matrizen
– das Spalten-Zeilen-Bild –

Sei $A = (a_{ij})$ eine $m \times l$-Matrix und $B = (b_{ij})$ eine $l \times n$-Matrix. Dann ist das Produkt $C = AB = (c_{ij})$ eine $m \times n$-Matrix mit der Eigenschaft:

Die Matrix C ist die Summe der Matrizen $C_1, \dots, C_l$, wobei die Matrix C_k jeweils aus der k-ten Spalte von A und der k-ten Zeile von B gebildet wird:

$$C = \sum_{k=1}^{l} C_k, \qquad C_k = (a_{ik}b_{kj}) = \begin{pmatrix} a_{1k}b_{k1} & \cdots & a_{1k}b_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mk}b_{k1} & \cdots & a_{mk}b_{kn} \end{pmatrix}$$

Assoziativität und Kommutativität
der Matrix-Matrix-Multiplikation

Seien A, B und C Matrizen in passenden Dimensionen sodass die Produkte jeweils existieren, dann gilt:

Die Matrizenmultiplikation ist **assoziativ**. D.h. es gilt

$$(AB)C = A(BC).$$

Im allgemeinen ist die Matrizenmultiplikation **nicht kommutativ**. D.h. es gilt

$$\exists A, B : AB \neq BA.$$

Ist im Einzelfall dennoch $AB = BA$ so sagt man, die Matrizen A und B **kommutieren**.

Aus $AB = AC$ folgt im allgemeinen nicht, daß $B = C$.

Spezielle Matrizenprodukte

Sein A eine Matrix, 0 eine Nullmatrix und I eine Identitätsmatrix, in passenden Dimensionen sodass die Produkte jeweils existieren, dann gilt:

$$0A = 0, \qquad A0 = 0$$

$$IA = A, \qquad AI = A$$

$$A^n := \underbrace{AA\dots A}_{n \text{ Faktoren}}$$

Rechenregeln für Matrizen

Seien A, B und C Matrizen in passenden Dimensionen sodass die Produkte jeweils existieren, dann gilt:

1. $(A + B)C = AC + BC$
2. $A(B + C) = AB + AC$
3. $(sA)B = s(AB) = A(sB)$
4. $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$
5. $(A + B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$
6. $(sA)^{\mathrm{T}} = s(A^{\mathrm{T}})$
7. $(AB)^{\mathrm{T}} = (B^{\mathrm{T}})(A^{\mathrm{T}})$

Elementare Zeilen- und Spaltenumformungen

Eine **elementare Zeilenumformung** ist

1. Vertauschen von zwei Zeilen einer Matrix,
2. Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $s \neq 0$ oder
3. Addition des s-fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile der Matrix.

Analog dazu definiert man **elementare Spaltenumformungen**.

Jede Matrix kann durch elementare Zeilen- oder Spaltenumformungen in eine Blockmatrix der Gestalt $\left(\begin{smallmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ gebracht werden.

Rang einer Matrix

Die Maximalanzahl linear unabhäniger Spaltenvektoren einer Matrix wird der **Spaltenrang** der Matrix genannt.

Die Maximalanzahl linear unabhäniger Zeilenvektoren einer Matrix wird der **Zeilenrang** der Matrix genannt.

Eine Matrix hat immer den gleichen Zeilen- wie Spaltenrang.

Der Rang einer Matrix wird durch elementare Zeilen- oder Spaltenumformungen nicht verändert.

Bestimmung des Ranges einer Matrix: Umformen in Dreiecksform durch elementare Zeilen- oder Spaltenumformungen (Vorwärtselimination des Gaußschen Eleminationsverfahren).

Lineare Gleichungssysteme

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $\vec{b} \in \mathbb{K}^m$. Dann heißt

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix} \quad \Longleftrightarrow \quad A\vec{x} = \vec{b}$$

ein System von m linearen Gleichungen in n Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$.

Die Matrix A heißt **Koeffizientenmatrix** des Systems.

Der Vektor $\vec{b}$ heißt **Inhomogenität** oder **„rechte Seite“** des Systems.

Im Falle $\vec{b} = \vec{0}$ heißt das System **homogen**.

Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

Sei $A\vec{x} = \vec{b}$ ein System von m lin. Gleichungen in n Unbekannten.

Hat das System mehr Gleichungen als Unbekannte ($m > n$) so heißt das System **überbestimmt**. Hat das System weniger Gleichungen als Unbekannte ($m < n$) so heißt das System **unterbestimmt**.

Jeder Vektor $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$ mit $A\vec{x} = \vec{b}$ heißt **Lösung** des Systems. Eine beliebige Lösung eines inhomogenen Gleichungssystems nennt man **Partikulärlösung**. Die Menge aller Lösungen des Gleichungssystems nennt man die **allgemeine Lösung**.

Das homogene Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$ hat immer (zumindest) die Lösung $\vec{x} = \vec{0}$. Ein überbestimmtes inhomogenes Gleichungssystem kann auch unlösbar sein.

Erweiterte Matrizen

Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen

Eine wesentliche Rolle bei der Untersuchung der linearer Gleichungssysteme $A\vec{x} = \vec{b}$ spielt die **erweiterte Matrix** $(A|\vec{b})$:

$$(A|\vec{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Ein lineares Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn

$$\mathrm{Rang}(A|\vec{b}) = \mathrm{Rang}\, A.$$

Das Gaußsche Eliminationsverfahren
– Vorwärtselimination –

Das **Gaußsche Eliminationsverfahren** ist ein Algorithmus zum lösen linearer Gleichungssysteme $A\vec{x} = \vec{b}$ anhand der erweiterten Matrix $(A|\vec{b})$. Seien i, j Zeilennummern des Systems und sei zunächst $i := 1$:

1. Zeilenvertauschung sodass $a_{ii} \neq 0$ ist. (Bzw. für bessere numerische stabilität sodass a_{ii} maximal ist.)
2. Multiplikation der i-ten Zeile mit a_{ii}^{-1}.
3. $\forall j > i$: Addition des $-a_{ji}$-fachen der i-ten Zeile zur j-ten Zeile (d.h. Erzeugen von Nullen unterhalb von a_{ii}).
4. Wiederholen für nächste Zeile: $i := i + 1$

Abbruch wenn das Ende der Matrix erreicht ist. (Wenn Punkt 1 nicht durchführbar ist ist die Matrix A singulär.)

Das Gaußsche Eliminationsverfahren
– Rückwärtseinsetzen –

Die Vorwärtselimination hat (für den Fall eines lösbaren Systems) die erweiterten Matrix des Gleichungssystems in obere Dreiecksform gebracht:

$$(A|\vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 1 & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{(m-1)n} & b_{(m-1)} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & b_m \end{pmatrix}$$

Dieses Gleichungssystem lässt sich trivial von unten nach oben Lösen: $x_n = b_m \quad \Rightarrow \quad x_{(n-1)} = b_{(m-1)} - x_n a_{(m-1)n} \quad \Rightarrow \quad \cdots$

Kern einer Matrix

Der **Kern** (oder **Nullraum**) einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ist die allgemeine Lösung des Systems $A\vec{x} = \vec{0}$. Der Kern bildet einen $(n - \mathrm{Rang}\, A)$-dimensionalen Unterraum von $\mathbb{K}^n$.

Im Fall $r = \mathrm{Rang}\, A < n$ bringt das Eliminationsverfahren die Matrix A in eine Matrix der Bauart $(R|M)$, zusammengesetzt aus der oberen Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{K}^{m \times r}$ und der Matrix $M \in \mathbb{K}^{m \times (n-r)}$.

Durch beliebige (lin. unabhänige) Wahl von $x_{(r+1)}, \ldots, x_n$ können durch Rückwärtseinsetzen $n - r$ lin. unabhänige Lösungsvektoren $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{(n-r)}$ ermittelt werden. Es ist dann

$$\mathrm{Kern}\, A = \mathcal{L}\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{(n-r)}\}.$$

Im Fall $r = n$ ist einfach $\mathrm{Kern}\, A = \vec{0}$.

Allgemeine Lösung eines (inhomogenen) linearen Gleichungssystems

Sei $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $\vec{b} \in \mathbb{K}^m$. Sei weiters $\mathbb{X} \subset \mathbb{K}^n$ die allgemeine Lösung des Gleichungssystems: $\mathbb{X} = \{\vec{x} \in \mathbb{K}^n | A\vec{x} = \vec{b}\}$

Im Fall $\vec{b} = \vec{0}$ (homogenes Gleichungssystem) ist $\mathbb{X} = \text{Kern}\, A$.

Im Fall $\vec{b} \neq \vec{0}$ (inhomogenes Gleichungssystem) ist $\mathbb{X} = \vec{x}_\text{p} + \text{Kern}\, A$ mit der partikulären Lösung $\vec{x}_\text{p} \in \mathbb{X}$. Die partikulären Lösung $\vec{x}_\text{p}$ wird wie folgt ermittelt:

Sei $r = \text{Rang}\, A < n$ und sei weiters A durch das Eliminationsverfahren bereits in die Form $(R|M|\vec{b})$, zusammengesetzt aus der oberen Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{K}^{m\times r}$, der Matrix $M \in \mathbb{K}^{m\times(n-r)}$ und der Inhomogenität $\vec{b}$ gebracht. Durch beliebige Wahl von $x_{(r+1)}, \dots, x_n$ kann nun durch Rückwärtseinsetzen eine partikuläre Lösung $\vec{x}_\text{p}$ ermittelt werden.

Inverse einer Matrix

Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Wenn es ein $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$AB = I_n$$

gibt so heißt dieses B „die zu A **inverse Matrix**“ oder „ die inverse von A“ und wird mit A^{-1} bezeichnet. Wenn so ein A^{-1} existiert dann ist A eine sog. **reguläre Matrix**, sonst ist a eine sog. **singuläre Matrix**. Für eine reguläre Matrix A gilt:

$$AX = 0 \Rightarrow X = 0, \qquad AA^{-1} = A^{-1}A = I, \qquad \text{Rang}(A) = n$$

Bestimmen von A^{-1}:
Die erweiterte Matrix $(A|I)$ wird durch Zeilenumformungen und Zeilenvertauschungen (Vorwärts- und Rückwärtselimination) in die Form $(I|X)$ gebracht. Dann ist $X = A^{-1}$.

Rechenregeln für inverse Matrizen, ähnliche Matrizen

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ reguläre Matrizen. Dann gilt:

$$(A^{-1})^{-1} = A, \qquad (A^\text{T})^{-1} = (A^{-1})^\text{T}$$
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \qquad A\vec{x} = \vec{b} \;\Leftrightarrow\; \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

Man beachte die umgedrehte Reihenfolge bei $(AB)^{-1}$!
Die Matrix X^{-1} macht rückgängig was die Matrix X bewirkt.

Die Matrizen $C, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißen **ähnlich**, falls eine reguläre Matrix $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert, sodass $C = TDT^{-1}$ gilt. D.h. wenn C und D das gleiche in unterschiedlichen Basen bewirken.

Lineare Abbildungen

Seien $\mathbb{V}$ und $\mathbb{W}$ zwei Vektorräume über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ heißt **lineare Abbildung**, wenn $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{V}$ und $\forall s \in \mathbb{K}$

$$\varphi(\vec{x} + \vec{y}) = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y}) \qquad \text{und}$$
$$s\varphi(\vec{x}) = \varphi(s\vec{x}) \qquad \text{gilt.}$$

Einer linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ entspricht umkehrbar eindeutig eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, sodass $\varphi : \vec{x} \mapsto A\vec{x}$. Dabei sind die Spalten von A die Bilder der Basisvektoren der kanonischen Basis den $\mathbb{K}^n$. D.h. $A = \big(\varphi(\vec{e}_1) \quad \cdots \quad \varphi(\vec{e}_n)\big)$.

Bild und Kern linearer Abbildungen

Dimensionssatz

Seien $\mathbb{V}$ und $\mathbb{W}$ zwei Vektorräume über $\mathbb{K}$ und φ eine lineare Abbildung $\mathbb{V} \to \mathbb{W}$. Dann sind Bild($\varphi$) und Kern($\varphi$):

$$\text{Bild}(\varphi) := \{\varphi(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \mathbb{V}\}$$
$$\text{Kern}(\varphi) := \{\vec{x} \in \mathbb{V} \mid \varphi(\vec{x}) = \vec{0}\}$$

Im Fall $\varphi(\vec{x}) = A\vec{x}$ (d.h. $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ und $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mit $\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_n$ als Spaltenvektoren von A):

$$\text{Bild}(\varphi) = \text{Bild}(A) := \mathcal{L}(\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_n)$$
$$\text{Kern}(\varphi) = \text{Kern}(A) := \{\vec{x} \in \mathbb{K}^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$$

Dimensionssatz:

$$\dim(\text{Kern}(\varphi)) + \dim(\text{Bild}(\varphi)) = n$$

In-, Sur- und Bijektivität linearer Abbildungen

Sei $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \vec{x} \mapsto A\vec{x}$, dann gilt

- im Fall φ ist injektiv:
  - $\text{Kern}(\varphi) = \text{Kern}(A) = \{\vec{0}\}, \quad \text{Rang}(A) = n$
  - $A\vec{x} = \vec{b}$ hat $\forall \vec{b} \in \mathbb{K}^m$ höchstens eine Lösung
- im Fall φ ist surjektiv:
  - $\text{Bild}(\varphi) = \text{Bild}(A) = \mathbb{K}^m, \quad \text{Rang}(A) = m$
  - $A\vec{x} = \vec{b}$ hat $\forall \vec{b} \in \mathbb{K}^m$ mindestens eine Lösung
- im Fall φ ist bijektiv:
  - $\text{Kern}(\varphi) = \text{Kern}(A) = \{\vec{0}\}, \quad \text{Rang}(A) = m = n$
  - $\text{Bild}(\varphi) = \text{Bild}(A) = \mathbb{K}^m$, A ist regulär,
  - $A\vec{x} = \vec{b}$ hat $\forall \vec{b} \in \mathbb{K}^m$ genau eine eideutige Lösung

Verknüpfung und inverse linearer Abbildungen

Sei $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k,\ \vec{x} \mapsto A\vec{x}$ und $\psi : \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}^m,\ \vec{x} \mapsto B\vec{x}$, dann entspricht die Verkettung dieser Abbildungen der Matrix AB:

$$\varphi \circ \psi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m,\ \vec{x} \mapsto AB\vec{x}$$

Sei $\varrho : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \vec{x} \mapsto C\vec{x}$ eine bijektive Abbildung, dann entspricht die inverse Abbildung ϱ^{-1} der inversen Matrix C^{-1}:

$$\varrho^{-1}(\varrho(\vec{x})) = \vec{x} \wedge \varrho(\vec{x}) = C\vec{x} \implies \varrho^{-1}(\vec{x}) = C^{-1}\vec{x}$$

Koordinatentransformation

Seien $\mathbb{B}$ und $\mathbb{B}'$ zwei Basen des $\mathbb{R}^n$, wobei wir $\mathbb{B}$ die *alte Basis* und $\mathbb{B}'$ die *neue Basis* nennen. Dann ist

$$T[\vec{v}]_{\mathbb{B}'} = [\vec{v}]_{\mathbb{B}}$$

die **Koordinatentransformation** von $\mathbb{B}$ nach $\mathbb{B}'$ Mit der Transformationsmatrix T. D.h. die Koordinatentransformation ist die Lösung dieses Linearsystems.

Im Falle der Koordinatentransformation von der kanonischen Basis in die Basis $\mathbb{B}'$ sind die Spalten von T die Basisvektoren von $\mathbb{B}'$.

Im Falle der Koordinatentransformation von $\mathbb{B}$ in die kanonische Basis sind die Spalten von T^{-1} die Basisvektoren von $\mathbb{B}$ und die Koordinatentransformation ist naheliegender weise trivial durchzuführen.

Lineare Abbildungen und Koordinatentransformationen

Seien T die Matrix einer Koordinatentransformation im $\mathbb{R}^n$ und S die Matrix einer Koordinatentransformation im $\mathbb{R}^m$ und A die Matrix einer linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\vec{x} \mapsto \vec{y}$ mit $A\vec{x} = \vec{y}$:

$$T\vec{x}\,' = \vec{x}, \qquad A\vec{x} = \vec{y}, \qquad S\vec{y}\,' = \vec{y}$$

Dann ist die Abbildung φ in den neuen Koordinaten $\vec{x}\,'$ und $\vec{y}\,'$:

$$A'\vec{x}\,' = \vec{y}\,' \qquad \text{mit} \qquad A' := S^{-1}AT$$

Im Fall $S = T$ (und $m = n$) gilt natürlich $A' := T^{-1}AT$.

Ziel einer Koordinatentransformation ist i.d.R. eine Matrix für eine Abbildung in eine einfachere Form zu bringen. Zum Beispiel heißt eine Matrix A **diagonalisierbar** wenn ein T und eine Diagonalmatrix D existiert sodass $D = T^{-1}AT$ gilt.

Definition der Determinante

Die **Determinante** einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ entspricht dem Volumen des von den Spalten- bzw. Zeilenvektoren der Matrix aufgespannten Parallelepiped. Es gilt neben $\det A = \det A^{\mathrm{T}}$:

- **Schiefsymetrie:** Vertauschen von zwei Spalten bzw. Zeilen von A dreht das Vorzeichen um.
- **Multilinearität:** Die Determinante ist linear in jeder Spate und jeder Zeile. D.h. z.B. mit den Spaltenvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\det(\dots, \vec{a}, \dots) + \det(\dots, \vec{b}, \dots) = \det(\dots, \vec{a} + \vec{b}, \dots)$$

$$\text{und} \qquad \det(\dots, s\vec{a}, \dots) = s\det(\dots, \vec{a}, \dots)$$

- **Normierungsvorschrift:** $\det I_n = 1$

Determinanten und singuläre Matrizen

Wenn $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ singulär ist, dann ist $\det A = 0$.

Beweis: Wegen der Schiefsymetrie muss sich das Vorzeichen der Determinante beim Vertauschen zweier gleicher Spalten/Zeilen umdrehen. Gleichzeitig muss die Determinante unverändert bleiben da ja die Matrix nicht verändert wurde. Das ist nur bei $\det A = 0$ der Fall.

Alternativer Beweis: Wegen der Multilinearität bleibt beim Eliminationsverfahren (Variante ohne Normierung der Hauptdiagonale) die Determinate betragsmässig unverändert. Bei einer singulären Matrix entsteht eine Nullzeile. Da sich bei Multiplikation dieser Zeile mit einem Faktor die Matrix nicht ändert muss auch die Determinante unverändert bleiben. Das ist nur bei $\det A = 0$ der Fall.

(Die Determinante ist das Produkt aller Pivot-Elemente. Bei einer singulären Matrix ist mindestens ein Pivot-Element 0.)

Geometrische Anschauung: Wenn die Matrix nicht vollen Rang hat ist der durch die Spalten/Zeilen aufgespannte Parallelepiped degeneriert und hat daher eine Volumen von 0.

Determinanten von 2 × 2- und Dreiecksmatrizen sowie die Regel von Sarrus

Berechnung der Determinante einer 2×2-Matrix:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Determinante einer 3×3-Matrix (Regel von Sarrus):

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{matrix} aei + bfg + cdh - \\ -gec - hfa - idb \end{matrix}$$

Determinante einer Dreiecksmatrix:

$$\det \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & \cdot \\ & \ddots & \vdots \\ & & d_n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} d_i = d_1 \cdots d_n$$