SBP Mathe Aufbaukurs 2

Diese Lernkarten sind sorgfältig erstellt worden, erheben aber weder Anspruch auf Richtigkeit noch auf Vollständigkeit.

Das Lernen mit Lernkarten funktioniert nur wenn die Inhalte bereits einmal verstanden worden sind. Ich warne davor diese Lernkarten nur stur auswendig zu lernen.

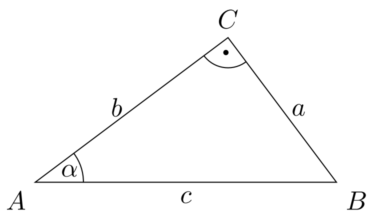
Diese und andere Lernkarten können von
`http://www.clifford.at/zettelkasten/`
heruntergeladen werden.

Viel Erfolg bei der **SBP Mathe Aufbaukurs 2** Prüfung!

Clifford Wolf <clifford@clifford.at>

Diese Lernkarten stehen unter der CC BY-NC-SA Lizenz.

Winkelfunktionen im rechtwinkeligen Dreieck



$$\sin\alpha = a/c \quad \ldots \quad \text{Gegenkathete/Hypotenuse}$$
$$\cos\alpha = b/c \quad \ldots \quad \text{Ankathete/Hypotenuse}$$
$$\tan\alpha = a/b \quad \ldots \quad \text{Gegenkathete/Ankathete}$$

a … Gegenkathete zu α, b … Ankathete zu α,
c … Hypotenuse

Winkelfunktionen besonderer Winkel

α	rad	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
$0°$	0	0	1	0
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	—

Zusammenhänge der Winkelfunktionen

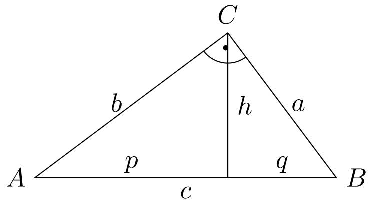
$$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha) \qquad \cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$$
$$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha) \qquad \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\sin\alpha = \sin(180° - \alpha) = y \quad\Rightarrow\quad \arcsin y = [180° -]\ \alpha$$
$$\cos\alpha = \cos(360° - \alpha) = x \quad\Rightarrow\quad \arccos x = [360° -]\ \alpha$$
$$\tan\alpha = \tan(180° + \alpha) = z \quad\Rightarrow\quad \arctan z = [180° +]\ \alpha$$

ACHTUNG: Die Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen sind nicht eindeutig!

Höhensatz und Kathetensatz



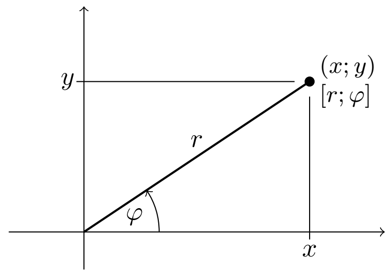
Höhensatz:

$$h^2 = p \cdot q$$

Kathetensatz:

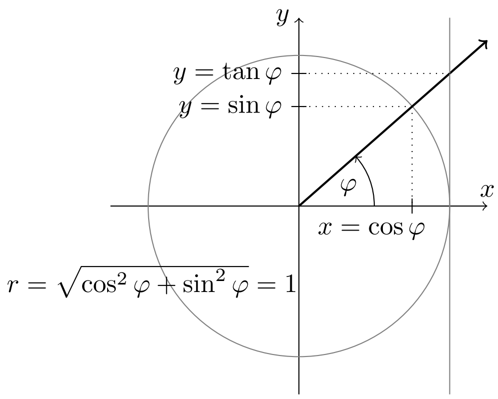
$$a^2 = q \cdot c, \qquad b^2 = p \cdot c$$

Polarkoordinaten und
kartesische Koordinaten

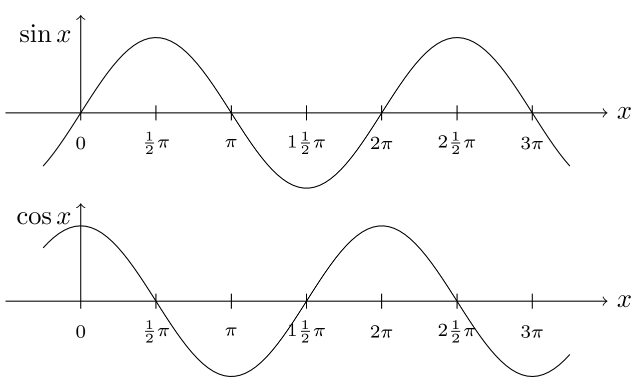


$$x = r \cdot \cos(\varphi) \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y = r \cdot \sin(\varphi) \qquad \varphi = \operatorname{arc}\tan(y/x) \quad [+180°]$$

Winkelfunktionen am Einheitskreis



Graphen von Sinus und Cosinus



Ableitungen der Winkelfunktionen

$$\sin' x = \cos x$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \Rightarrow \quad \cos' x = -\sin x$$

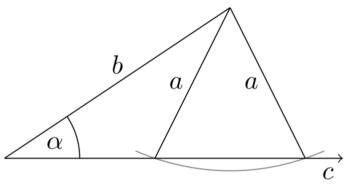
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad \tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Sinussatz

In jedem Dreieck gilt:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Achtung: In manchen Fällen liefert der Sinussatz keine eindeutige Lösung! Es seien z.B. a, b und α gegeben und $h_c < a < b$:



Wenn 2 Seiten und 1 Winkel gegeben sind und die dem Winkel anliegende Seite die längere ist, dann ist der Sinussatz nicht immer eindeutig.

Trigonometrische Flächeninhaltsformel für allgemeine Dreiecke

Für den Flächeninhalt A eines Dreicks gilt:

$$A = \frac{ab}{2} \cdot \sin\gamma = \frac{ac}{2} \cdot \sin\beta = \frac{bc}{2} \cdot \sin\alpha$$

Cosinussatz

In jedem Dreieck gilt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

Ähnliche Dreiecke

Zwei Dreiecke heißen ähnlich, wenn sie in den drei Winkeln übereinstimmen. In ähnlichen Dreiecken gilt:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \qquad \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}, \qquad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

1. Summensatz der Winkelfunktionen

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta \\
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta \\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta
\end{aligned}$$

2. Summensatz der Winkelfunktionen

$$\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}
\end{aligned}$$

Das Bogenmaß

Das Bogenmaß eines Winkels ist das Verhältnis $a = \frac{b}{r}$, wobei b die Länge eines zum Winkel gehörenden Kreisbogens mit dem Radius r ist.

Damit entspricht das Bogenmaß eines Winkels der Länge des zum Winkel gehörenden Kreisbogens im Einheitskreis.

Das Bogenmaß ist eine dimensionslose Verhältniszahl. Zur besseren Kennzeichnung wird es jedoch manchmal mit der Benennung Radiant (rad) versehen.

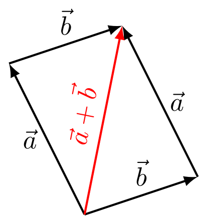
Definition: Vektor

Ein Vektor bezeichnet eine Richtung und eine Länge im Raum.

Vektoren werden oft als Pfeile veranschaulicht. Alle Pfeile mit gleicher Orientierung und gleicher Länge sind Repräsentanten des gleichen Vektors.

Zwei Vektoren heissen gleich (oder äquivalent) wenn sie die gleiche Orientierung im Raum und die gleiche Länge haben.

Graphische Summe von Vektoren



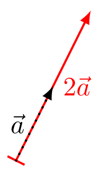
Vektoren werden graphisch addiert, indem man die Repräsentanten (Pfeile) der Vektoren durch Parallelverschiebung so angeordnet werden, dass der Anfang eines Pfeils am Ende des vorhergehenden Pfeils zu liegen kommt.

Der Pfeil vom Anfang des ersten Vektors zum Ende des letzten Vektors ist ein Repräsentant des Summenvektors.

Die Addition von Vektoren ist Kommutativ und Assoziativ.

In der Physik ist es üblich, die Summanden als *Komponenten* und die Summe als *Resultierende* zu bezeichnen.

Graphische Skalarmultiplikation von Vektoren



Die Skalarmultiplikation $x\vec{a}$ des Vektors $\vec{a}$ wird graphisch gebildet, indem ein Repräsentant (Pfeil) des Vektors so verlängert oder verkürzt wird, dass seine neue Länge das x-fache der ursprünglichen Länge ist.

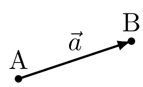
Die Orientierung (Richtung) des Vektors muss dabei unverändert bleiben.

Die Skalarmultiplikation von Vektoren ist distributiv und assoziativ:

$$r\vec{a} + s\vec{a} = (r+s)\vec{a} \qquad r(\vec{a}+\vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b} \qquad r(s\vec{a}) = (rs)\vec{a}$$

Der Vektor $-\vec{a}$ zeigt in die entgegengesetzte Richtung wie $\vec{a}$.

Vektoren, Punkte, Ortsvektoren

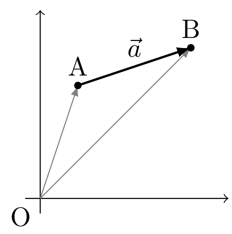


Häufig werden Vektoren durch ihre Anfangs- und Endpunkte angegeben:

$$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

Jedem Punkt X ist der Ortsvektor $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ zugeordnet. Häufig wird einfach X geschrieben wenn $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ gemeint ist:

$$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \mathrm{B} - \mathrm{A}$$



Vektoren und Koordinaten

Wie Punkte im Raum können auch Vektoren mit Koordinaten angeschrieben werden:

$$\mathrm{A} = (a_1;\ a_2) \qquad \Longrightarrow \qquad \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Sei $\vec{a} = \binom{a_1}{a_2}$ und $\vec{b} = \binom{b_1}{b_2}$:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix} \qquad x\vec{a} = \begin{pmatrix} xa_1 \\ xa_2 \end{pmatrix}$$

Betrag eines Vektors

Der Betrag eines Vektors ist seine Länge, die mit dem Pythagoräischen Lehrsatz errechnet werden kann:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$$

Vektoren mit dem Betrag 1 nennt man Einheitsvektoren.

Kartesische Einheitsvektoren

Man nennt die Vektoren $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **kartesische Einheitsvektoren** der Ebene.

$$\vec{a} \;=\; \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \;=\; a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$$

Analog dazu heißen $\vec{i} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{j} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\vec{k} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ kartesische Einheitsvektoren des Raumes.

Inneres Produkt zweier Vektoren

Das innere Produkt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (auch: „Skalarprodukt“ oder „Punktprodukt“) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ist das Produkt der Beträge der Parallelen Komponenten der beiden Vektoren:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \;=\; |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \;=\; a_1 \cdot b_1 + \cdots + a_n \cdot b_n$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Winkel zwischen zwei Vektoren

Aus der Beziehung

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \;=\; |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$$

(Definition des inneren Produkts zweier Vektoren) folgt

$$\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \;.$$

Rechenregeln für das innere Produkt von Vektoren

Das innere Produkt ist Kommutativ und Distributiv:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \;=\; \vec{b} \cdot \vec{a} \qquad\qquad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) \;=\; \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

Das innere Produkt ist Assoziativ bzgl. der Skalarmultiplikation:

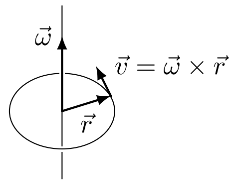
$$x(\vec{a} \cdot \vec{b}) \;=\; (x\vec{b}) \cdot \vec{a} \;=\; \vec{b} \cdot (x\vec{a})$$

Aber das innere Produkt ist selbst nicht Assoziativ:

$$\exists\, \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\ : \qquad \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) \;\neq\; (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Das vektorielle Produkt

Des vektorielle Produkt $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ (auch: „Kreuzprodukt“) ist ein Vektor, der rechtwinkelig auf die von $\vec{r}$ und $\vec{\omega}$ aufgespannte Ebene steht und vom Betrag her das Produkt der Beträge der normal aufeinander stehenden Komponenten von $\vec{r}$ und $\vec{\omega}$ ist.



$\vec{v}$, $\vec{\omega}$ und $\vec{r}$ bilden ein **Rechtssystem**:

$$\begin{array}{lcl} \vec{v} & \widehat{=} & \text{Daumen} \\ \vec{\omega} & \widehat{=} & \text{Zeigefinger} \\ \vec{r} & \widehat{=} & \text{Mittelfinger} \end{array}$$

Der Betrag von $\vec{a} \times \vec{b}$ ist gleich dem Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

Berechnung von $\vec{a} \times \vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$$

Definition: Vektorraum

Sei $\mathbb{V}$ eine Menge von Vektoren (n-Tupel). $\mathbb{V}$ ist ein Vektorraum wenn:

- eine kommutative und assoziative algebraische Funktion $\oplus$ definiert ist, die je zwei Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ einen weiteren Vektor $v_1 \oplus v_2 \in \mathbb{V}$ zuordnet.
- ein neutraler Vektor n definiert ist für den $v \oplus n = v$ gilt.
- fuer jeden Vektor $v \in \mathbb{V}$ ein inverser Vektor $v^* \in \mathbb{V}$ definiert ist für den $v \oplus v^* = n$ gilt.
- eine algebraische Funktion $\odot$ definiert ist die je einer Zahl $t \in \mathbb{R}$ und einem Vektor $v \in \mathbb{V}$ einen weiteren Vektor $t \odot v \in \mathbb{V}$ zuordnet, so dass gilt:

$$t \odot (v_1 \oplus v_2) = (t \odot v_1) \oplus (t \odot v_2) \qquad s \odot (t \odot v) = (s \cdot t) \odot v$$
$$(s+t) \odot v = (s \odot v) \oplus (t \odot v) \qquad 1 \odot v = v$$

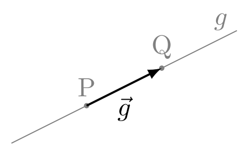
Definition: Betragsfunktion eines reellen Vektorraums

Es sei $\mathbb{V}$ ein reeller Vektorraum ($\mathbb{R}^k$). Eine Funktion $f : \mathbb{V} \mapsto \mathbb{R}$ heisst Norm oder Betragsfunktion von $\mathbb{V}$ wenn:

- $f(v) \geq 0$ für alle $v \in \mathbb{V}$
- $f(v) = 0 \Leftrightarrow v = n$ (n = neutrales Element von $\mathbb{V}$)
- $f(t \odot v) = |t| \cdot f(v)$
- $f(v_1 \oplus v_2) \leq f(v_1) + f(v_2)$

Statt $f(v)$ wird meist $|v|$ oder $\|v\|$ oder „Betrag von v“ geschrieben.

Parameterdarstellung einer Geraden



Sei g eine Gerade und $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in g$, $\mathrm{P} \neq \mathrm{Q}$. Dann nennt man $\vec{g} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ ($\vec{g} \neq \vec{o}$) einen Richtungsvektor der Geraden g und

$$g = \{ \mathrm{X} \mid \mathrm{X} = \mathrm{P} + t \cdot \vec{g} \}$$

oder kurz $g\colon\ \mathrm{X} = \mathrm{P} + t \cdot \vec{g}$

die Parameterdarstellung von g (mit dem Parameter t).

Zu jeder Geraden gibt es unendlich viele Parameterdarstellungen.

Parallele Geraden

Zwei Geraden g und h sind genau dann parallel, wenn jeder Richtungsvektor von g auch ein Richtungsvektor von h ist und umgekehrt.

Schnittpunkt zweier Geraden

Seien $g\colon \mathrm{X} = \mathrm{A} + t \cdot \vec{g}$ und $h\colon \mathrm{X} = \mathrm{B} + s \cdot \vec{h}$ Geraden.

Um den Schnittpunkt P von g und h zu ermitteln setzt man die beiden Parameterdarstellungen gleich:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{P} = \mathrm{A} + t_0 \cdot \vec{g} \\ \mathrm{P} = \mathrm{B} + s_0 \cdot \vec{h} \end{array}\right\} \implies \mathrm{A} + t_0 \cdot \vec{g} \;=\; \mathrm{B} + s_0 \cdot \vec{h}$$

Hat dieses Gleichungssystem keine Lösung so gibt es keinen Schnittpunkt. D.h. die Geraden sind dann parallel oder windschief.

Hat dieses Gleichungssystem unendlich viele Lösungen, so heißt das, daß die beiden Geraden identisch sind.

Normalvektorform einer Geraden

Sei $g\colon \mathrm{X}$ eine Gerade in der Ebene, P ein beliebiger Punkt auf g und $\vec{n}$ ein Normalvektor von g, dann ist

$$\vec{n} \cdot \mathrm{X} = \vec{n} \cdot \mathrm{P}$$

die **Normalvektorform** von g.

Wir setzten für $\vec{n} = \binom{a}{b}$, $\mathrm{X} = \binom{x_1}{x_2}$ und $\mathrm{P} = \binom{p_1}{p_2}$ ein:

$$\binom{a}{b} \cdot \binom{x_1}{x_2} = \binom{a}{b} \cdot \binom{p_1}{p_2} \implies ax_1 + bx_2 = \underbrace{ap_1 + bp_2}_{\text{const.}}$$

Die Normalvektorform beschreibt also die Gerade als Lösungsmenge einer linearen Gleichung mit den zwei Unbekannten x_1 und x_2.

Von der Parameterdarstellung einer Geraden zur Normalvektorform

Sei $g\colon \mathrm{X} = \mathrm{P} + t \cdot \vec{g}$ eine Gerade in der Ebene.

Ansatz 1: Erweitern mit einem Normalvektor $\vec{n} \perp \vec{g}$

$$\mathrm{X} = \mathrm{P} + t \cdot \vec{g} \overset{\cdot \vec{n}}{\implies} \mathrm{X} \cdot \vec{n} = \mathrm{P} \cdot \vec{n} + \underbrace{t \cdot \vec{g} \cdot \vec{n}}_{=0}$$

Ansatz 2: Eliminieren von t

$$\binom{x_1}{x_2} = \binom{a}{b} + t \cdot \binom{c}{d} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 = a + t \cdot c \\ x_2 = b + t \cdot d \end{array} \Rightarrow t = \frac{x_2 - b}{d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = a + \frac{x_2 - b}{d} \cdot c \implies \underline{\underline{dx_1 - cx_2 = ad - bc}}$$

Von der Normalvektorform zur Parameterdarstellung einer Geraden

Sei $ax_1 + bx_2 = y$ die Normalvektorform der Geraden g. Gesucht ist die Parameterdarstellung $X = P + t \cdot \vec{g}$.

Aus dem Normalvektor $\vec{n} = \binom{a}{b}$ kann gefolgert werden, dass $\vec{g} = \binom{b}{-a}$ ein Richtungsvektor von g ist.

Durch eine willkürliche Wahl von x_1 oder x_2 wird der Punkt P entweder als $\mathrm{P} = \binom{x_1}{(y - ax_1)/b}$ oder als $\mathrm{P} = \binom{(y - bx_2)/a}{x_2}$ festgelegt.

$$X = \binom{x_1}{(y - ax_1)/b} + t \cdot \binom{b}{-a} \qquad \text{bzw.} \qquad X = \binom{(y - bx_2)/a}{x_2} + t \cdot \binom{b}{-a}$$

Bei $a = 0$ bzw. $b = 0$ ist nur jene definition von P möglich die nicht zu einer Division durch Null führt.

SBP Mathe Aufbaukurs 2 # 36 by Clifford Wolf

Ebene, Richtunungsvektor der Ebene, Parameterdarstellung der Ebene

36 Antwort

Durch drei Punkte des Raums, die nicht auf einer Geraden liegen, geht genau eine Ebene.

Ein vom Nullvektor verschiedener Vektor, der Parallel zur Ebene E liegt, heißt ein Richtunungsvektor der Ebene E. Also jeder Vektor, der zwei voneinander verschiedene Punkte in der Ebene E verbindet, ist ein Richtunungsvektor dieser Ebene E.

Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei linear unabhänige Richtungsvektoren der Ebene E und sei P ein Punkt in E. Dann ist

$$E\colon \mathrm{X} = \mathrm{P} + u \cdot \vec{a} + v \cdot \vec{b}$$

eine Parameterdarstellung der Ebene E mit den Parametern u und v.

SBP Mathe Aufbaukurs 2 # 37 by Clifford Wolf

Von der Parameterdarstellung der Ebene zur Normalvektorform

37 Antwort

Gegeben: $\mathrm{X} = \mathrm{P} + u \cdot \vec{a} + v \cdot \vec{b}$
Gesucht: $\vec{n} \cdot X = k$

Lösungsstrategie:
Die gegebene Parameterdarstellung wird als Gleichungssystem mit 3 Gleichungen angeschrieben. Anschliessend werden die unbekannten u und v eliminiert und so eine lineare Gleichung in X erstellt:

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + u \cdot a_1 + v \cdot b_1 \\ x_2 &= p_2 + u \cdot a_2 + v \cdot b_2 \\ x_3 &= p_3 + u \cdot a_3 + v \cdot b_3 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = k \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n} \cdot X = k$$

SBP Mathe Aufbaukurs 2 # 38 by Clifford Wolf

Von der Normalvektorform der Ebene zur Parameterdarstellung

38 Antwort

Gegeben: $\vec{n} \cdot X = k$ Gesucht: $\mathrm{X} = \mathrm{P} + u \cdot \vec{a} + v \cdot \vec{b}$

Ansatz 1: Ermitteln von 3 Punkten
Es werden 3 (verschiedene) Punkte P, A und B ermittelt: jeweils 2 Koordinaten willkürlich festlegen und die dritte durch Einsetzen in die Gleichung errechnen. Eine Parameterdarstellung ist:

$$\mathrm{X} = \mathrm{P} + u \cdot \overrightarrow{PA} + v \cdot \overrightarrow{PB}$$

Ansatz 2: Teilweises festlegen der Richtungsvekotren
Die gegebene Gleichung wird in die Form $x_1 = a + bx_2 + cx_3$ umgewandelt. Indem man $u = x_2$ und $v = x_3$ setzt ergibt sich folgende Parameterdarstellung:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

SBP Mathe Aufbaukurs 2 # 39 by Clifford Wolf

Normale Geraden im Raum und Normalvektoren von Ebenen

39 Antwort

Zwei Vektoren im Raum stehen normal aufeinander, wenn ihr inneres Produkt Null ergibt.

Zwei Geraden im Raum sind dann normal, wenn ihre Richtungsvektoren normal aufeinander stehen.

Ein Vektor $\vec{n}$ heißt Normalvektor einer Ebene E, wenn $\vec{n}$ zu allen Richtungsvektoren von E normal ist.

Das innere Produkt von einem Normalvektor $\vec{n}$ einer Ebene und jedem Punkt X der Ebene ist konstant.

Linearkombinationen von Vektoren und lineare Abhänigkeit von Vektoren

Ein Vektor $\vec{x} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n$ heißt **Linearkombination** von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$.

Existiert eine Linearkombination $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n = 0$ mit mindestens einem $\lambda_k \neq 0$, so heißen die Vektoren **linear abhänig**, ansonsten **linear unabhänig**.

In einer Liste von linear unabhänigen Vektoren kann mindestens einer der Vektoren als Linearkombination der übrigen dargestellt werden.

Im n-dimensionalen Raum können maximal n Vektoren linear unabhänig voneinander sein.

Matrix

Unter einer **m×n-Matrix** versteht man ein rechteckiges Schema reeller oder komplexer Zahlen mit m Zeilen und n Spalten.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Im Fall $m = n$ spricht man von einer **quadratischen Matrix**.
Im Fall $a_{ij} = a_{ji}$ spricht man von einer **symetrischen Matrix**.

Durch Vertauschung von Zeilen und Spalten (= *kippen* um die **Hauptdiagonale**) erhällt man die **transponierte Matrix** A^{T}.

Addition von Matrizen und Multiplikation von Matrix und Skalar

Addition von Matrizen:
Seien $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ jeweils $m{\times}n$-Matrizen:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

Multiplikation von Matrix und Skalar:
Sei $A = (a_{ij})$ eine $m{\times}n$-Matrix und λ ein Skalar:

$$\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij})$$

Multiplikation von Matrizen

Seien $A = (a_{ij})$ eine $m{\times}n$-Matrix und $B = (b_{jk})$ eine $n{\times}p$-Matrix:

$$AB = C \qquad (C = (c_{ik}) \text{ ist eine } m{\times}p\text{-Matrix})$$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

Das heißt die Elemente von C werden gebildet indem jeweils das innere Produkt des passenden Zeilenvektors aus A und des passenden Spaltenvektors aus B gebildet wird.

Zeilenweise Multiplikation von Matrizen

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}}_{C}$$

Jede Zeile von C ist eine Linearkombination aller Zeilen aus B mit den Koeffizienten aus der entsprechenden Zeile aus A.

$$\begin{pmatrix} c_{21} \\ c_{22} \\ c_{23} \end{pmatrix} = a_{21} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{22} \\ b_{23} \end{pmatrix} + a_{23} \begin{pmatrix} b_{31} \\ b_{32} \\ b_{33} \end{pmatrix}$$

Spaltenweise Multiplikation von Matrizen

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}}_{C}$$

Jede Spalte von C ist eine Linearkombination aller Spalten aus A mit den Koeffizienten aus der entsprechenden Spalte aus B.

$$\begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \end{pmatrix} = b_{12} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + b_{22} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + b_{32} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

Nullmatrix und Einheitsmatrix

Die Nullmatrix $\mathbb{O}$ ist jene Matrix, die mit einer anderen Matrix addiert wieder diese andere Matrix als Ergebnis liefert:

$$\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Die Einheitsmatrix E ist jene Matrix, die mit einer anderen Matrix multipliziert wieder diese andere Matrix als Ergebnis liefert:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinante einer Matrix

Sei $A = (a_{ij})$ eine quadratische $n{\times}n$-Matrix.
Dann ist $\det(A) = |A|$ (die Determinante von A) definiert als:

$n = 1$:

$$|A| = a_{11}$$

$n = 2$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$n = 3$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{23} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

SBP Mathe Aufbaukurs 2 # 48 by Clifford Wolf

Entwicklungssatz von Laplace
zur Berechnung von Determinanten

48 Antwort

Eine Determinante kann nach jeder beliebigen Zeile oder Spalte entwickelt werden. Das heißt:

$$
\begin{aligned}
& |A| = a_{i1}|A_{i1}| + a_{i2}|A_{i2}| + \cdots + a_{in}|A_{in}| \qquad i = 1,\ \ldots,\ m \\
\text{bzw. } & |A| = a_{1j}|A_{1j}| + a_{2j}|A_{2j}| + \cdots + a_{mj}|A_{mj}| \qquad j = 1,\ \ldots,\ n
\end{aligned}
$$

Wobei A_{xy} jene Matrix ist, die man erhaellt wenn man aus A die x-te Zeile und y-te Spalte entfernt und die resultierende Matrix mit -1 multipliziert wenn $x + y$ ungerade ist. Zum Beispiel:

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}
$$

SBP Mathe Aufbaukurs 2 # 49 by Clifford Wolf

Eigenschaften von Determinanten

49 Antwort

Vertauscht man zwei Zeilen oder Spalten, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

Multipliziert man eine Zeile oder Spalte mit einem konstanten Faktor, so multipliziert sich auch die Determinante mit diesem Faktor.

Addiert man ein Vielfaches einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte), so ändert sich die Determinante nicht.

Für die Transponierte einer Matrix gilt $|A^{\mathrm{T}}| = |A|$ sowie für das Produkt $|AB| = |A| \cdot |B|$.

Für die Inverse einer Matrix gilt $|A^{-1}| = |A|^{-1}$. Wenn die Determinante einer Matrix 0 ist so gibt es keine Inverse zu dieser Matrix.

SBP Mathe Aufbaukurs 2 # 50 by Clifford Wolf

Die inverse Matrix

50 Antwort

Sei A eine quadratische Matrix. Wenn (und nur wenn) $|A| \neq 0$ dann gibt es eine inverse Matrix A^{-1}, so dass

$$
A \cdot A^{-1} \; = \; A^{-1} \cdot A \; = \; E \qquad (E = \text{Einheitsmatrix})
$$

ist.

Die inverse Matrix wird berechnet indem in die oben stehende Definition eingesetzt wird. Zum Beispiel:

$$
\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\left.\begin{matrix} 2a + 1c = 1 \\ 5a + 3c = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} a = 3 \\ c = -5 \end{matrix} \qquad \left.\begin{matrix} 2b + 1d = 0 \\ 5b + 3d = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} b = -1 \\ d = 2 \end{matrix}
$$

SBP Mathe Aufbaukurs 2 # 51 by Clifford Wolf

Lineare Gleichungssysteme und
Matrizen

51 Antwort

Lineare Gleichungssysteme der Form

$$
\begin{aligned}
a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = k_1 \\
a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = k_2
\end{aligned}
$$

können auch als Multiplikation einer Matrix mit einem Spaltenvektor angeschrieben werden:

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}
$$

Lösung mittels Gaußschem Eliminationsverfahren oder der inversen Matrix: $A \cdot \vec{x} = \vec{b} \implies \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$

Cramersche Regel

Die Cramersche Regel (Determinantenmethode) ist ein Verfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme.

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \implies x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

Wobei A_i aus der Matrix A entsteht, wenn man die i-te Spalte durch den Vektor $\vec{b}$ ersetzt.

z.B. $$\begin{matrix} 1x_1 + 2x_2 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 = 6 \end{matrix} \Rightarrow x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}}$$

Lösungsäquivialente Umformungen in linearen Gleichungssystemen

Sei $A\vec{x} = \vec{b}$ eine lineare Gleichung in $\vec{x}$. Die Lösungsgesamtheit des linearen Gleichungssystems ändert sich nicht bei:

- Vertauschen zweier Geichungen
  (d.h. zweier Zeilen von $[A\vec{b}]$)
- Vertauschen zweier Spalten von A
  (und Umbezeichnung der zugehörigen Variablen)
- Multiplikation einer Gleichung mit einem Faktor $\neq 0$
- Multiplikation einer Gleichung mit einem Faktor
  und Addition zu einer anderen Gleichung

Gaußsches Eliminationsverfahren

Sei $A\vec{x} = \vec{b}$ eine lineare Gleichung in $\vec{x}$. Durch Lösungsäquivialente Umformungen wird die Gleichung so in $A'\vec{x} = \vec{b}'$ umgewandelt, daß A' eine obere Dreiecksmatrix ist. Zum Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Durch einsetzen „von unten nach oben“ werden die Werte für die Variablen bestimmt:

$$\begin{aligned} -4x_3 = 8 &\Leftrightarrow x_3 = -2 \\ 3x_2 + 6x_3 = -2 &\Leftrightarrow 3x_2 = -2 + 6 \cdot 2 = 10 \Leftrightarrow x_2 = {}^{10}/_3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -4 &\Leftrightarrow x_1 = -4 + 2 \cdot {}^{10}/_3 + 3 \cdot 2 = {}^{26}/_3 \end{aligned}$$

Gleichungen von Kreis und Kugel

Ein Kreis k ist die Menge jener Punkte in der Ebene, die den Abstand r (Radius) zum Punkt M (Mittelpunkt) haben.

$$k : \{ \; X \in \mathbb{R}^2 \; \big| \; |X - M| = r \; \}$$

$$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2$$

Eine Kugel s (Sphere) ist die Menge jener Punkte im Raum, die den Abstand r (Radius) zum Punkt M (Mittelpunkt) haben.

$$s : \{ \; X \in \mathbb{R}^3 \; \big| \; |X - M| = r \; \}$$

$$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$$