

# SBP Mathe Grundkurs 1

Diese Lernkarten sind sorgfältig erstellt worden, erheben aber weder Anspruch auf Richtigkeit noch auf Vollständigkeit.

Das Lernen mit Lernkarten funktioniert nur wenn die Inhalte bereits einmal verstanden worden sind. Ich warne davor diese Lernkarten nur stur auswendig zu lernen.

Diese und andere Lernkarten können von  
<http://www.clifford.at/zettelkasten/>  
heruntergeladen werden.

Viel Erfolg bei der **SBP Mathe Grundkurs 1** Prüfung!

*Clifford Wolf <clifford@clifford.at>*

Diese Lernkarten stehen unter der CC BY-NC-SA Lizenz.

# Mengenoperationen

$x \in A, \quad x \notin A$      $x$  ist (nicht) Element von  $A$ .

$A \subseteq B, \quad A \not\subseteq B$      $A$  ist (nicht) Teilmenge von  $B$ .

$A \subset B, \quad A \not\subset B$      $A$  ist (nicht) echte Teilmenge von  $B$ .

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} =$  Schnittmenge

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\} =$  Vereinigungsmenge

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} =$  Differenzmenge

$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\} =$  Produktmenge

# Logische Operationen

$A \Leftrightarrow B$	Äquivalenz	(gleichbedeutend mit)
$A \Rightarrow B$	Implikation	(daraus folgt)
$A \wedge B$	Konjunktion	(und)
$A \vee B$	Disjunktion	(oder)
$A \bar{\vee} B$	Antivalenz	(ungleich, entweder-oder)
$\neg A$	Negation	(nicht)
$\forall A : B$	Allquantor	(für alle $A$ gilt $B$ )
$\exists A : B$	Existenz	(es gibt ein $A$ für das $B$ gilt)

# natürliche Zahlen

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$(\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\})$$



# ganze Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$(\mathbb{Z}^- = \{\dots, -3, -2, -1\})$$

# rationale Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z}{n} \mid z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

$$\mathbb{Q}^+ = \{q \mid q \in \mathbb{Q}, q > 0\}$$

$$\mathbb{Q}^- = \{q \mid q \in \mathbb{Q}, q < 0\}$$

# reelle Zahlen

$\mathbb{R}$  = alle Zahlen auf der Zahlengerade

Untermengen:  $\mathbb{R}^+$ ,  $\mathbb{R}^-$ ,  $\mathbb{R}_0^+$ ,  $\mathbb{R}_0^-$

Assoziativgesetze  
(Addition und Multiplikation)

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$



Kommutativgesetze  
(Addition und Multiplikation)

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

# Distributivgesetz der Multiplikation

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

# Äquivalenzumformungen der Multiplikation

$$a \cdot b = c \Leftrightarrow a = \frac{c}{b} \Leftrightarrow b = \frac{c}{a}$$

# Äquivalenzumformungen der Addition

$$a + b = c \Leftrightarrow a = c - b \Leftrightarrow b = c - a$$



Definition: lineare Gleichung

eine lineare Gleichung ist eine Gleichung mit den Variablen  $x_n$  der Gestalt

$$ax_1 + bx_2 + \dots = k.$$

Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems ist die Schnittmenge der Lösungsmengen der einzelnen Gleichungen.

# Gauss'sches Eliminationsverfahren

$$ax_1 + bx_2 = c \quad | \cdot d$$

$$dx_1 + ex_2 = f \quad | \cdot -a$$

$$\Leftrightarrow$$

$$adx_1 + bdx_2 = dc$$

$$-adx_1 - aex_2 = -af$$

$$\Rightarrow$$

$$(ad - ad)x_1 + (bx - ae)x_2 = dc - af$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(bx - ae)x_2 = dc - af$$

## Definition: Betrag

$$|a| = \begin{cases} a & | \ a \geq 0 \\ -a & | \ a < 0 \end{cases}$$

## Definition: lineare Funktion

$$f(x) = kx + d$$

$$\Rightarrow f(0) = d, \quad \Rightarrow f(x+1) - f(x) = k$$

$\Rightarrow$  der Graph von  $f$  ist eine Gerade mit der Steigung  $k$ .



## 2-Punkt Formel für lineare Funktion

$$f(x) = k \cdot x + d$$

$$k = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$d = f(x) - k \cdot x$$

Definition: direkte und indirekte  
Proportionalität

direkte Proportionalität:

$$f(x) = k \cdot x$$

indirekte Proportionalität:

$$f(x) = \frac{k}{x}$$

# Konstante Faktoren bei direkter und indirekter Proportionalität

bei direkter Proportionalität:

$$f(x) = k \cdot x \Rightarrow f(a \cdot x) = a \cdot f(x)$$

bei indirekter Proportionalität:

$$f(x) = \frac{k}{x} \Rightarrow f(a \cdot x) = \frac{f(x)}{a}$$

Definition: (streng) monoton  
steigend/fallend

streng monoton steigend (wachsend):

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

streng monoton fallend (abnehmend):

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

monoton steigend (wachsend):

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$$

monoton fallend (abnehmend):

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$$



Definition: Graph einer reellen  
Funktion

$$f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbb{A} \in \mathbb{R}$$

$$G = \{(x; y) \mid x \in \mathbb{A}, y = f(x)\}$$

$G =$  Graph der reellen Funktion  $f$

# Potenzieren von Ungleichungen

$$a < b \Leftrightarrow a^n < b^n$$

wenn  $a, b \in \mathbb{R}_0^+$  und  $n \in \mathbb{R}^+$ .

## Monotoniegesetz der Addition

*Mon+*:

$$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$$

$$(a, b, c \in \mathbb{R})$$

# Monotoniegesetze der Multiplikation

*Mon · pos:*

$$a < b \Leftrightarrow a \cdot c < b \cdot c \mid c > 0$$

*Mon · neg:*

$$a < b \Leftrightarrow a \cdot c > b \cdot c \mid c < 0$$

$$(a, b, c \in \mathbb{R})$$



Kehrwert und Negation bei  
Ungleichungen mit 0

$$0 < a \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{a}$$

$$0 < a \Leftrightarrow 0 > -a$$

$$0 < a < b \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

$$(a, b \in \mathbb{R})$$

# Addition und Multiplikation von Ungleichungen

$$a < b \wedge c < d \Rightarrow a + c < b + d$$

$$(a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

$$a < b \wedge c < d \Rightarrow a \cdot c < b \cdot d$$

$$(a \in \mathbb{R} \wedge b, c, d \in \mathbb{R}^+)$$

# Transitivgesetz der Ordnungsrelation

$$a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$$

## Formeln für Quadrat-Binome

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$



Lösungsformel und Strategie fuer  
$$x^2 + px + q = 0$$

$$x^2 + px + q = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + px = -q \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \Leftrightarrow \dots$$

$$\dots \Leftrightarrow x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Wie viele Lösungen hat  
 $x^2 + px + q = 0$ ?

$$x^2 + px + q = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

2 Lösungen in  $\mathbb{R}$  wenn  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$

1 Lösung in  $\mathbb{R}$  wenn  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$

keine Lösung in  $\mathbb{R}$  wenn  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \text{Diskriminante}$$

## Satz von VIETA

Seien  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  Lösungen von

$$x^2 + px + q = 0$$

dann gilt fuer alle  $x \in \mathbb{R}$ :

$$x^2 + px + q = (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2)$$

mit  $\alpha_1 + \alpha_2 = -p$  und  $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = q$ .

Lösungsformel für  
 $ax^2 + bx + c = 0$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\iff$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



## Definition von Polynomfunktion

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$n$  = Grad der Polynomfunktion

## Abspalten eines Linearfaktors

Sei  $f$  eine Polynomfunktion  $n$ -ten Grades und  $\alpha \in \mathbb{R}$  eine Nullstelle von  $f$ , dann gibt es eine Polynomfunktion  $g$   $(n - 1)$ -ten Grades, so dass für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:

$$f(x) = (x - \alpha) \cdot g(x)$$

Methoden zur Ermittlung der Koeffizienten von  $g$ :

- Koeffizientenvergleich
- Polynomdivision

# Methode des Koeffizientenvergleichs

Beispiel - allgemeines Polynom dritter Ordnung:

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - \alpha) \cdot (b_2x^2 + b_1x + b_0) =$$

$$= b_2x^3 + b_2x^2 + b_0x - \alpha b_2x^2 - \alpha b_1x - \alpha b_0 =$$

$$= \underbrace{b_2}_{a_3} x^3 + \underbrace{(b_1 - \alpha b_2)}_{a_2} x^2 + \underbrace{(b_0 - \alpha b_1)}_{a_1} x + \underbrace{(-\alpha b_0)}_{a_0}$$

$$\Rightarrow b_2 = a_3, \quad b_1 = a_2 + \alpha b_2, \quad b_0 = a_1 + \alpha b_1, \quad \underbrace{\alpha b_0 = -a_0}_{\text{Kontrolle}}$$

## Satz von Horner

$$a^n - b^n = (a - b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Beweis durch Ausmultiplizieren:  
alle Terme in der Mitte fallen weg.



## Definition der Potenz-Funktion

Potenz-Funktion = wiederholtes multiplizieren:

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n \text{ mal}}$$

$x$  = Basis,  $n$  = Exponent

## Definition der Wurzel-Funktion

Wurzel-Funktion = Umkehrung der Potenz-Funktion:

$$x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$$

# Wurzeln von Potenzen

$$\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$$

# Potenzen mit Exponenten kleiner 1

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$



# Exponenten aus $\mathbb{Q}$

$$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$$

# Potenzieren von Potenzen

$$(a^k)^n = a^{k \cdot n}$$

# Potenzieren von Produkten

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

# Multiplikation von Potenzen gleicher Basis

$$a^k \cdot a^n = a^{k+n}$$



## Brüche von Potenzen gleicher Basis

$$\frac{a^k}{a^n} = \begin{cases} a^{k-n} & | \quad k > n \\ \frac{1}{a^{n-k}} & | \quad k < n \\ 1 & | \quad k = n \end{cases}$$

# Verzinsung

Beispiel mit 5,5% Verzinsung im Jahr:

$k_0$  = ursprünglich eingezahlter Betrag

$k_1, k_2, k_3, \dots$  = Betrag nach 1, 2, 3, ... Jahren

$$k_1 = k_0 + 0,055 \cdot k_0 = 1,055 \cdot k_0$$

$$k_2 = k_1 + 0,055 \cdot k_1 = 1,055^2 \cdot k_0$$

$$k_n = 1,055^n \cdot k_0$$

# Wurzeln von Produkten und Brüchen

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

# Wurzeln von Wurzeln

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$



## Definition der Exponentialfunktion

$$f(x) = c \cdot a^x$$

$$(c, x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^+)$$

## Definition der Logarithmusfunktion

$$a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a(y)$$

$\log_a$  = Logarithmus zur Basis  $a$

Definition des natürlichen Logarithmus  
und der natürlichen  
Exponentialfunktion

natürliche Exponentialfunktion:

$$\exp(x) = e^x$$

natürlicher Logarithmus:

$$\ln(x) = \log_e(x)$$

$e \approx 2.7183\dots$  = die Eulersche Zahl

Logarithmen beliebiger Basis mit dem  
natürlichen Logarithmus

$$\log_a = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$



Potenzen beliebiger Basis mit der natürlichen Exponentialfunktion

$$a^x = e^{\lambda \cdot x}$$

$$\lambda = \ln(a)$$

# Monotonie von Exponentialfunktionen

$$a^x \text{ ist } \begin{cases} \text{streng monoton steigend} & | a > 1 \\ \text{streng monoton fallend} & | a < 1 \end{cases}$$

# Logarithmen von Potenzen

$$\log_a(b^x) = x \cdot \log_a(b)$$

# Logarithmen von Produkten

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

(Prinzip des Rechenschiebers)



# Unbeschränktes exponentielles Wachstum

$$N(t) = N_0 \cdot a^t = N_0 \cdot e^{\lambda t} \quad \text{mit } \lambda = \ln a$$

$\lambda > 0, \quad a > 1 \quad =$  exponentielles Wachstum

$\lambda < 0, \quad a < 1 \quad =$  exponentielle Abnahme

Warum kann  $\sqrt{2}$  keine  
rationale Zahl sein?

Beweis von  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$  durch Widerspruch:

$$\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \implies \exists a, b \in \mathbb{N}^* : \sqrt{2} = \frac{a}{b} \quad \wedge \quad a, b \text{ teilerfremd}$$

$$\implies \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2 \implies \frac{a^2}{b^2} = 2 \implies a^2 = 2b^2$$

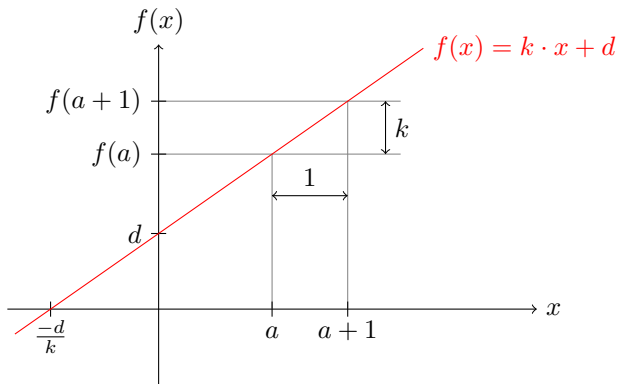
$\implies a^2$  ist gerade  $\implies a$  ist gerade (denn 2 ist eine Primzahl und muss daher bereits in  $a$  als Primfaktor enthalten sein)

$$\implies \exists p \in \mathbb{N}^* : a = 2p \implies a^2 = (2p)^2 = 4p^2 = 2b^2 \implies 2p^2 = b^2$$

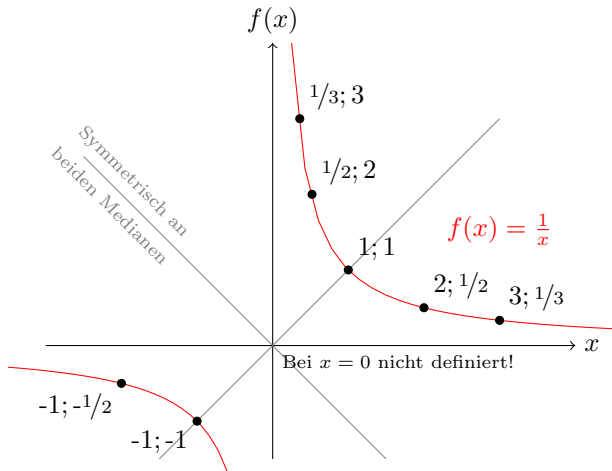
$$\implies b^2 \text{ ist gerade} \implies b \text{ ist gerade}$$

$$\implies \text{Widerspruch zu } a, b \text{ teilerfremd} \implies \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \quad \square$$

# Graph einer linearen Funktion

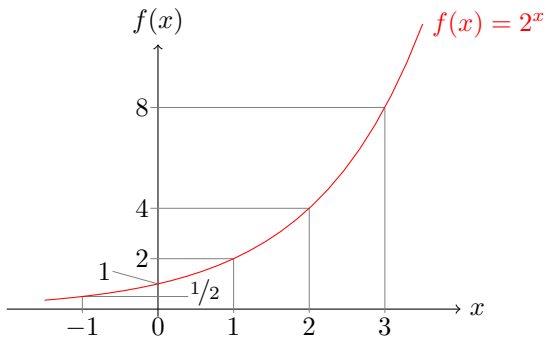


Graph von  $1/x$





Graph der Exponentialfunktion  
(Am Beispiel von  $2^x$ )



# Graph der Exponential- und Logarithmusfunktion

