SBP Mathe Grundkurs 2

Diese Lernkarten sind sorgfältig erstellt worden, erheben aber weder Anspruch auf Richtigkeit noch auf Vollständigkeit.

Das Lernen mit Lernkarten funktioniert nur wenn die Inhalte bereits einmal verstanden worden sind. Ich warne davor diese Lernkarten nur stur auswendig zu lernen.

Diese und andere Lernkarten können von

`http://www.clifford.at/zettelkasten/`

heruntergeladen werden.

Viel Erfolg bei der **SBP Mathe Grundkurs 2** Prüfung!

Clifford Wolf <clifford@clifford.at>

Differentialquotient

Der Differentialquotient ist die Änderungsrate von $f(x)$ an einem Punkt.

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Das heisst $f'(x)$ ist die Steigung der Tangente des Funktionsgraphen von f an der Stelle x.

Bestimmen der Ableitung: Einsetzen in die obige Definition und umformen, so dass beim Gleichsetzen von $z = x$ (bzw. $\Delta x = 0$) nicht mehr durch 0 dividiert wird.

Namen und Schreibweisen für Differentialquotienten

$$f'(x) \quad = \quad \lim_{z \to x} \tfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \quad = \quad \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$f' \quad = \quad \text{Ableitung von } f \quad = \quad \text{Differentialquotient}$$

$$f'' \quad = \quad \text{2. Ableitung von } f$$

Leibniz'sche Schreibweise:

$$f'(x) \quad = \quad \tfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \quad = \quad \tfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \quad = \quad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$$

$$f' = \dot{f} = \tfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}, \qquad f'' = \ddot{f} = \tfrac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}$$

Ableitung von $f(x) = c$

$$f(x) = c \qquad \text{(konstante Funktion)}$$

$$\Longrightarrow \quad f'(x) = 0$$

Ableitung von $f(x) = kx + d$

$$f(x) = kx + d \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = k$$

Ableitung von $f(x) = x^n$

$$f(x) = x^n \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Ableitung von Funktionen mit konstanten Faktoren

$$f(x) = c \cdot g(x) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = c \cdot g'(x)$$

Ableitung von $f(x) = g(x) + h(x)$

$$f(x) = g(x) + h(x) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

Kurze Schreibweise: $(g + h)' = g' + h'$

Satz von der Intervallmonotonie

$f : \mathbb{A} \mapsto \mathbb{R}, \quad f'$ die Ableitung von $f, \quad \mathbb{I} \subseteq \mathbb{A}$ ein Intervall:

$$f'(x) > 0 \text{ fuer alle inneren Stellen } x \text{ von } \mathbb{I} \implies f \text{ ist streng monoton wachsend in } \mathbb{I}$$

$$f'(x) < 0 \text{ fuer alle inneren Stellen } x \text{ von } \mathbb{I} \implies f \text{ ist streng monoton abnehmend in } \mathbb{I}$$

Satz vom Ableitungsvorzeichen

$f : \mathbb{A} \mapsto \mathbb{R}$, f' die Ableitung von f, $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{A}$ ein Intervall:

Besitzt f' keine Nullstelle in $\mathbb{I}$, so ist
entweder $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{I}$
oder $f'(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{I}$

Das heisst zwischen 2 Nullstellen von f' bleibt das Vorzeichen von f' und damit das Monotonieverhalten von f unverändert.

Voraussetzung: $f'(x)$ ist in ganz $\mathbb{I}$ definiert und stetig.

Definition: Maximum- und Minimumstelle

$f : \mathbb{A} \mapsto \mathbb{R}, \quad \mathbb{M} \subseteq \mathbb{A}$:

$p \in M =$ Maximumstelle von f in M
wenn $\forall x \in \mathbb{M}$: $f(x) \leq f(p)$

$p \in M =$ Minimumstelle von f in M
wenn $\forall x \in \mathbb{M}$: $f(x) \geq f(p)$

Definition: Umgebung

$a \in \mathbb{R}, \quad \epsilon \in \mathbb{R}^+$:

$$]a - \epsilon; a + \epsilon[= \text{Umgebung von } a \text{ (mit dem Radius } \epsilon)$$

Definition: Lokale Maximum- und Minimumstelle

$f : \mathbb{A} \mapsto \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{A}$:

$p =$ lokale Maximumstelle von f
wenn es ein $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt, so dass
$\forall x \in \,]p - \epsilon; p + \epsilon[\colon f(x) \leq f(p)$

$p =$ lokale Minimumstelle von f
wenn es ein $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt, so dass
$\forall x \in \,]p - \epsilon; p + \epsilon[\colon f(x) \geq f(p)$

Definition: Extremstelle

Extremstelle = Maximumstelle oder Minimumstelle

Potentielle lokale Extremstellen von Polynomfunktionen

Sei f eine Polynomfunktion:

$$p \text{ eine lokale Extremstelle von } f \quad \Rightarrow \quad f'(p) = 0$$

(Jede Extremstelle von f ist eine Nullstelle von f')

Aber: Nicht jede Nullstelle von f' ist auch eine Extremstelle von f.

Definition: links- und rechtsgekrümmt

$f : \mathbb{A} \mapsto \mathbb{R}, \quad \mathbb{I} \subseteq \mathbb{A}$ ein Intervall:

f ist linksgekrümmt in $\mathbb{I}$ wenn:

f' in $\mathbb{I}$ streng monoton wachsend ist
d.h. wenn $f''(x) > 0$ für alle inneren Stellen x von $\mathbb{I}$

f ist rechtsgekrümmt in $\mathbb{I}$ wenn:

f' in $\mathbb{I}$ streng monoton abnehmend ist
d.h. wenn $f''(x) < 0$ für alle inneren Stellen x von $\mathbb{I}$

Definition: Wendestelle (Wendepunkt)

Eine Stelle, an der sich das Krümmungsverhalten einer Funktion ändert, nennt man Wendestelle oder Wendepunkt.

Lokale Maximum- und Minimumstellen von Polynomfunktionen

Sei f eine Polynomfunktion:

x ist eine lokale Maximumstelle von f wenn:

$$f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) < 0$$

x ist eine lokale Minimumstelle von f wenn:

$$f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) > 0$$

Aber: Nicht alle Extremstellen haben ein $f'' \neq 0$.
Beispiel: x^4 bei $x = 0$: erst die 4. Ableitung ist $\neq 0$!

Alle lokalen Maximum- und Minimumstellen von Polynomfunktionen

Zum finden aller lokalen Maximum- und Minimumstellen der Polynomfunktion f ist wie folgt vorzugehen:

- Alle Nullstellen von f' finden.
- Die Werte von f an allen Nullstellen von f' ermitteln.
- Zwei beliebige Werte von f links und rechts von allen Nullstellen von f' ermitteln.
- Aus den ermittelten f-Werten das Monotonieverhalten von f zwischen den Nullstellen von f' ablesen.
- Jede Nullstelle von f' ist ein Extremwert, wenn sich das Monotonieverhalten von f an der Stelle ändert.

Ableitung von $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{\big(v(x)\big)^2}$$

Kurze Schreibweise: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

Ableitung von $f(x) = u(x) \cdot v(x)$

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = v(x)u'(x) + u(x)v'(x)$$

Kurze Schreibweise: $(u \cdot v)' = vu' + uv'$

Ableitung von $f(x) = \sqrt[n]{x}$

$$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

$$\Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

Ableitung von $f(x) = h(g(x))$ (Kettenregel)

$$f(x) = h(g(x)) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Kurze Schreibweise: $(h \circ g)' = (h' \circ g) \cdot g'$

Ableitung der Exponentialfunktion

$$f(x) = \mathrm{e}^x$$

$$f(x) = \mathrm{e}^x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \mathrm{e}^x$$

Für die Exponentialfunktion $f(x) = \mathrm{e}^x$ gilt also $f' = f$.

Ableitung von $f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$

$$g(x) = \lambda x, \quad h(y) = \mathrm{e}^y$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} = h(g(x))$$

$$\Longrightarrow \quad f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} \cdot \lambda$$

Ableitung von $f(x) = a^x$

$$f(x) = a^x = \mathrm{e}^{\ln(a)\cdot x}$$

$$\Longrightarrow \quad f'(x) = \mathrm{e}^{\ln(a)\cdot x} \cdot \ln(a) = a^x \cdot \ln(a)$$

Ableitung von $f(x) = \ln(x)$

$$f(x) = \ln(x) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

Ableitung von $f(x) = \log_a(x)$

$$f(x) = \log_a(x) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$$

Ableitung von Sinus, Cosinus und Tangens

$$\sin' x = \cos x$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \Rightarrow \quad \cos' x = -\sin x$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad \tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Ableitung von Umkehrfunktionen

$f(g(x)) = x$, g' ist bekannt, f' ist gesucht:

$$f(g(x)) = x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))}$$

Definition: Stammfunktion

Ist f eine reelle Funktion, dann heisst eine reelle Funktion F eine Stammfunktion von f, wenn $F' = f$ gilt.

Ist F eine Stammfunktion von f, so ist auch $F + c$ eine Stammfunktion von f.

Schreibweise als unbestimmtes Integral:

$$\int f = F \qquad \text{bzw.} \qquad \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)$$

Stammfunktion von $f : x \mapsto k$

$$\int k \, \mathrm{d}x \quad = \quad kx$$

Stammfunktion von $f : x \mapsto k \cdot g(x)$

$$\int k \cdot g(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad k \cdot \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

Stammfunktion von $f\colon x \mapsto g(x) + h(x)$

$$\int g(x) + h(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad \int g(x)\,\mathrm{d}x + \int h(x)\,\mathrm{d}x$$

Stammfunktion von $f\colon x \mapsto x^n$

$$\int x^n \,\mathrm{d}x \quad = \quad \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} \quad = \quad \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Spezialfall $n =$ -1: $$\int x^{\text{-}1} \,\mathrm{d}x \quad = \quad \int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x \quad = \quad \ln x$$

Definition: (bestimmtes) Integral

Das (bestimmte) Integral von f in den Grenzen a und b:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}) \cdot \Delta x$$

Die Funktion wird in n jeweils Δx breite Intervalle unterteilt. $\overline{x_i}$ bezeichnet dabei eine Stelle im i-ten Intervall. Bei $\lim_{n\to\infty}$ entspricht diese “Summe von unendlich vielen jeweils unendlich schmalen Streifen” dem Integral.

Bei durchgehend positiven Funktionswerten: Das Integral ist der Flächeninhalt der Fläche zwischen der 1. Achse und dem Funktionsgraphen.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$f : \mathbb{A} \mapsto \mathbb{R}, \quad F' = f, \quad [a;b] \subseteq \mathbb{A}$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad F(b) - F(a) \quad = \quad F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

Volumen eines Rotationskörpers

Volumen eines Rotationskörpers:

$$V_{\mathrm{K}} \;=\; \pi \cdot \int_a^b \left(f(x)\right)^2 \,\mathrm{d}x$$

(Denn $V_{\mathrm{Z}} = \pi r^2 h$ ist das Volumen eines Zylinders.)

Länge eines Graphen

Länge eines Graphen:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, \mathrm{d}x$$

Begründung: Die Sekante des i-ten Teilabschnitts des Graphen mit der Länge Δx hat die Steigung $f'(\overline{x_i})$. Das heisst die Länge des Teilabschnitts ist die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten Δx und $f'(\overline{x_i}) \cdot \Delta x$. Also ist die Länge des Teilabschnitts wegen $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}$ gleich $\sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot \Delta x$.

Partialbruchzerlegung

Ein Bruch zweier Polynome (Nenner von höherem Grad als Zähler) kann in eine Summe einfacher Brüche zerlegt werden:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \frac{a_1}{x-\alpha_1} + \frac{a_2}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{a_n}{x-\alpha_n}$$

wobei α_i die Nullstellen von $P_2(x)$ sind. Doppelte Nullstellen und komplexe Nullstellen können behandelt werden, ergeben aber Brüche mit einem anderen Aufbau.

Zur Ermittlung der a_i wird die rechte Seite auf gemeinsamen Nenner gebracht. Dann können die a_i durch Koeffizientenvergleich der Zähler bestimmt werden.

Partielle Integration

Die partielle Integration ist ein Verfahren zur Integration mancher Produkte. Dabei wird ein Integral in ein anderes umgewandelt. Das Verfahren kommt dann zur Anwendung, wenn das neue Integral leichter zu lösen ist.

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad \left(f(x) \cdot g(x)\right)\Big|_{x=a}^{x=b} \; - \; \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

Zur Beurteilung, ob die partielle Integration hilfreich ist, ist der Blick auf das vereinfachte unbestimmte Integral oft hilftreich:

$$\int f \cdot g' \quad = \quad (\cdots) \; - \; \int f' \cdot g$$

Die partielle Integration ist Umkehrung der Produktregel $(u \cdot v)' = uv' \cdot vu'$.

Substitutionsmethode

Die Substitutionsmethode ist ein Verfahren um eine bestimmte Klasse komplizierter Integrale in einfachere Integrale umzuwandeln:

$$\int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t)\,\mathrm{d}t \quad = \quad \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Bei der Anwendung der Substitutionsmethode ist oft erst eine kreative Umformung des Integrals notwendig. Etwa das Einführen eines konstanten Faktors im Integral und seines Kehrwerts ausserhalb des Integrals, damit ein $g'(t)$ entsteht. Zum Beispiel:

$$\int_a^b t \cdot f(t^2)\,\mathrm{d}t \quad = \quad \frac{1}{2}\int_a^b 2t \cdot f(t^2)\,\mathrm{d}t \quad = \quad \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Die Substitutionsmethode basiert auf der Kettenregel.